

Membres du groupe :

- Eliott Bernard de Courville
- Johanna Charpentier
- Margot Farkas
- Tanguy Reltgen



XXV^e Olympiades de Physique

2017-2018

Les Chemins de la colère de Zeus



Professeurs référents

- Mme Guerra
 - M. Ménétrier
- 75006 Paris

Ecole Alsacienne

109 rue Notre-Dame des Champs

Résumé

La foudre est un phénomène aussi dangereux qu'impressionnant, d'une forme facilement reconnaissable. A travers cette Olympiade, nous nous y sommes intéressés, et plus particulièrement à la modélisation de sa trajectoire. Bien que nous ne puissions pas reproduire ce phénomène naturel en laboratoire, nous avons cherché d'autres solutions pour l'étudier. Après nous être intéressés au phénomène de manière théorique, nous nous sommes en particulier concentrés sur sa propagation en deux dimensions, à travers nos expériences, utilisant une machine de Wimshurst et divers montages, ainsi qu'à travers une simulation informatique que nous avons développée. Nous nous sommes aussi intéressés au caractère fractal de la foudre, que nous avons mis en relation avec les résultats de nos expériences.

Sommaire

Résumé	1
Sommaire	2
Introduction	4
I) La foudre, un phénomène naturel complexe	5
A) Formation et structure d'un nuage d'orage	5
B) Caractéristiques électriques du nuage d'orage	6
1) Electrification du nuage	6
2) Structure électrique de l'orage	6
C) L'éclair : un phénomène complexe	6
1) Déroulement de la décharge nuage-sol	6
2) Les différents types d'éclairs	7
3) L'éclair, une structure fractale	7
II) La propagation de la foudre	8
A) Présentation du projet de reproduction expérimentale	8
B) Reproductions expérimentales des caractéristiques de la foudre	9
III) Modélisation mathématique et simulation de la foudre	13
A) Modèles mathématiques permettant de décrire la propagation de la foudre	13
1) Formation décrite par le modèle de diffusion limitée par agrégation (DLA)	13
2) Progression décrite par le DBM (dielectric breakdown model)	14
B) Programme de simulation	15
1) Concepts physiques et mathématiques du programme	16
2) Résolution itérative de l'équation de Laplace en appliquant la méthode aux différences finies	16
3) Justification de la méthode itérative de résolution de l'équation de Laplace	17
4) Election du site de croissance parmi les sites de croissance potentiels	18
IV) Dimension fractale	19
A) La foudre, un objet fractal	19
B) Application du calcul des dimensions	19
Conclusion	24
Remerciements	24
Annexes	25
Images supplémentaires	25
Sources des figures	29
Bibliographie	29
Déroulé du programme de simulation de DBM	30
Programme de simulation de DBM	31

Introduction

La foudre est un phénomène qui a toujours fasciné les hommes. Indomptable, imprévisible et destructeur, ce phénomène a longtemps été considéré comme une manifestation divine. Pourtant, dès l'Antiquité, les hommes de science se sont penchés sur la nature de la colère de Zeus : ainsi, Lucrèce écrit dans son œuvre De rerum natura : “Le ciel est ébranlé quand la foudre résonne, / Parce que dans les airs les nuages mouvants / S'entrechoquent”.

En France, on recense environ un million d'impacts par an en moyenne, responsables de 20 000 sinistres chaque année, dont le coût total est estimé à 100 000 000 d'euros par an. La foudre est aussi particulièrement meurtrière : chaque année, 10 000 à 20 000 têtes de bétail sont tuées, et entre 20 et 40 personnes décèdent à la suite d'un foudroiement direct ou indirect. L'impact de la foudre sur les infrastructures est également dévastateur, plus particulièrement sur les sites pétroliers et les usines chimiques. En témoignent ainsi l'explosion du pétrolier Princesse Irène, en août 1972, provoquant la mort de six personnes, et l'explosion de l'usine Pechiney, en mars 1986, faisant quatre victimes.

Les dangers que représente cette manifestation électrique sont donc considérables, et ne vont cesser d'augmenter au cours des prochaines années. En effet, une étude publiée par l'American Association for the Advancement of Science affirme que l'augmentation progressive de la température de l'atmosphère va conduire à une augmentation de la densité de foudroiement partout dans le monde. Les chiffres sont impressionnants : +12% de foudroiements par degré gagné, soit une augmentation globale de 50% d'ici la fin du siècle¹. Cette menace va donc s'intensifier, d'autant plus que les technologies numériques en plein essor sont de plus en plus nombreuses et donc vulnérables face à ce phénomène.

La prévision de la foudre est un domaine complexe en raison des multiples paramètres qui doivent être pris en compte ainsi que de la part aléatoire qui détermine la progression du phénomène. Aujourd'hui, certains organismes de veille météorologique comme ESTOFEX (European Storm Forecast Experiment) produisent des prévisions probabilistes de foudre (15 et 50%)², mais il est encore difficile de prévoir le potentiel électrique d'une cellule orageuse et la trajectoire de l'éclair qu'elle peut produire. Néanmoins, de nombreuses recherches ont été menées sur la réalisation de modèles météorologiques de haute résolution permettant de simuler les processus de chargement du nuage ainsi que le déclenchement de la décharge. On compte parmi eux le modèle Méso-NH³ de météo France développé pour simuler la genèse de l'éclair, du chargement du nuage à l'impact au sol.

Nous avons auparavant réalisé notre TPE sur les figures de Lichtenberg, des motifs circulaires ramifiés gravés par la foudre lorsqu'elle frappe un isolant. A travers cette Olympiade, nous avons tenté de modéliser la trajectoire de la foudre. Nous avons ainsi étudié dans un premier temps le phénomène naturel qu'est la foudre, puis nous avons tenté de reproduire ses caractéristiques à travers diverses expériences. D'autre part nous avons conçu un programme informatique permettant de modéliser la trajectoire d'un éclair nuage-sol. Enfin nous avons vérifié la

¹ Climate change. Projected increase in lightning strikes in the United States due to global warming

² www.estofex.org (“ESTOFEX starts probabilistic thunder forecasting”)

³ Etude de l'activité électrique des systèmes orageux à l'aide du modèle Méso-NH

cohérence de notre programme avec la réalité en comparant la dimension fractale de la foudre et celle des figures obtenues via notre simulation.

I. La foudre, un phénomène naturel complexe

On appelle communément “foudre” un phénomène de rupture diélectrique entre un nuage d’orage et le sol. Il convient d’abord de présenter la formation et la structure d’un nuage d’orage, puis les caractéristiques du nuage orageux, avant d’étudier l’éclair. On utilisera ici l’abréviation CG+/- pour évoquer l’éclair nuage-sol (cloud-to ground) et ses différentes polarités.

A. Formation et structure d’un nuage d’orage

Le nuage d’orage, ou cumulonimbus, est avant tout caractérisé par son extension verticale conséquente (jusqu’à 10 km de hauteur sous nos latitudes). Ces dimensions impressionnantes sont atteintes par un phénomène que l’on nomme convection, c’est à dire le soulèvement d’une parcelle d’air instable. Cette parcelle est rendue instable de par sa température, supérieure à celle de son milieu, donc plus légère, ce qui va permettre son élévation. Les conditions nécessaires à la convection, et donc au développement du cumulonimbus sont la chaleur, l’humidité et l’instabilité. L’air instable entre en convection lorsqu’un forçage, qui peut être de nature thermique (rencontre d’une masse d’air froid, réchauffement diurne) ou orographique (convection d’une masse d’air qui rencontre un relief et s’élève en suivant ses pentes), provoque le soulèvement de l’air.

Lorsque la masse d’air instable s’élève, on assiste à la formation de cumulus, qui évoluent ensuite en cumulus bourgeonnants, continuant de s’élever, jusqu’à ce que l’air chaud et instable parvienne dans un environnement dont la température est plus élevée que la sienne propre. En effet, à environ 10km d’altitude se trouve une limite infranchissable pour l’air en convection : il s’agit de la tropopause, une zone où la température ne diminue plus mais augmente avec l’altitude. Ainsi le sommet du cumulonimbus, après avoir atteint la tropopause, s’étale sous l’effet de la convection vigoureuse. On obtient ainsi un nuage avec une extension verticale imposante, et dont le sommet ressemble à une large enclume : le nuage orageux est né. (Voir annexe 1)



cumulus bourgeonnant



convection active



étalement du sommet

Etapas de formation du cumulonimbus [figures 1 à 3]

B. Caractéristiques électriques du nuage d'orage

1. Electrification du nuage

Cependant, pour que le terme d'orage soit utilisé, il faut être en présence de tonnerre, c'est à dire du son produit par l'échauffement brutal de l'air lors de la rupture diélectrique. Dès lors, la différence de potentiel entre le nuage et le sol doit être très élevée pour pouvoir vaincre la résistance opposée par l'air (environ 30kV/cm au niveau du sol à pression et température moyenne : 1008hPa et 20°C). Il faut donc expliquer le chargement du nuage. Encore aujourd'hui, il subsiste quelques incertitudes sur les mécanismes de chargement. Le mécanisme gravitationnel non-inductif⁴ reste actuellement le plus complet et le plus précis pour décrire le processus d'électrification du nuage. Il a également été confirmé lors d'observations in-situ⁵

Selon cette théorie, le chargement des hydrométéores (eau, eau surfondue, glace, graupel, neige...) est dû aux chocs successifs lors de turbulences en conditions atmosphériques instables entre les hydrométéores légers (pluie, eau surfondue, neige), en suspension dans le nuage, et les hydrométéores lourds (grêle, graupel), en chute libre dans le nuage. La multiplicité des chocs entre les gouttelettes d'eau et la glace arrache des électrons aux particules qui les composent, ce qui provoque l'apparition de charges.

2. Structure électrique de l'orage

De manière générale, les particules les plus lourdes (graupel et grêle), chargés négativement, tombent en bas du nuage tandis que les cristaux de glace plus légers et chargés positivement se positionnent au sommet du nuage. Longtemps considéré comme un dipôle avec un sommet positif et une base négative, il a été prouvé que la structure d'un nuage orageux est en réalité plus proche du tripôle⁶, bien que certaines modélisations rendent compte d'une structure plus complexe encore. Cette structure particulière s'explique par une séparation des charges due à leur répulsion mutuelle.

C. L'éclair : un phénomène complexe

1. Déroulement de la décharge nuage-sol

Lorsque le champ de rupture est atteint, dans le cas de l'éclair descendant CG-, le précurseur, un arc électrique de faible luminosité est déclenché. Il se déplace à une vitesse proche de 100 km/s et avance par bonds successifs dus à l'ionisation progressive de l'air. Si le champ est trop faible, la décharge ne se propage plus, et est relancée lorsque l'intensité du champ le permet. Lorsque le précurseur s'approche du sol, le champ électrique devient suffisamment intense pour initier un traceur ascendant. Les deux traceurs se rejoignent et forment un canal conducteur à travers lequel se propage une décharge ascendante permettant de rétablir l'électroneutralité entre la zone chargée du nuage et le sol nommée "arc en retour". Cependant, si la charge n'est pas neutralisée, un second traceur peut alors se propager depuis le nuage vers le sol, empruntant le canal déjà ionisé. Ce second traceur est nommé "dart leader" et peut parcourir plusieurs fois le même canal.

⁴ Takahashi, 1978 ; Saunders, 1991

⁵ Dye et al., 1986

⁶ Krehbiel, 1986 ; MacGorman et Rust, 1998

2. Les différents types d'éclairs

On compte deux types d'éclairs, caractérisés par la zone dans laquelle ils ont lieu.

- Les éclairs nuage-sol sont les éclairs les moins fréquents ($\approx 5\%$), mais représentent un danger considérable. Leur polarité est définie en fonction de la zone de charge d'où part l'éclair : les plus courants sont les éclairs négatifs ($\approx 90\%$ des éclairs nuage-sol), les éclairs de polarité positive ne représentant qu'environ 10% des éclairs nuage-sol. Parmi ses deux types d'éclairs, on distingue également les éclairs dits "ascendants", c'est à dire se propageant du sol vers le nuage, et les éclairs dits "descendants", lorsque le traceur se déplace du nuage vers le sol.
- Les éclairs qui n'atteignent pas le sol, qui peuvent être inter-nuageux (entre deux nuages), intra-nuageux (entre deux zones chargées d'un même nuage) ou bien extra-nuageux (du nuage vers l'ionosphère)

(voir annexe 2 pour un schéma récapitulatif)

3. L'éclair, une structure fractale

La foudre constitue un phénomène complexe dont l'allure semble chaque fois différente. En effet, sa trajectoire est aléatoire, faisant de chaque éclair un motif unique. Cependant, l'étude visuelle des éclairs montre la présence d'une structure qui se répète à différentes échelles. L'éclair est de fait formé d'une branche principale qui se divise en de plus petites branches qui se divisent à leur tour. Dès lors, il semble que la structure de la foudre se caractérise par une répétition à différentes échelles d'un même motif : c'est l'autosimilarité. Pourtant, l'éclair n'est pas exactement autosimilaire de par son tracé aléatoire. Il est en fait statistiquement autosimilaire, c'est à dire que sur un grand nombre de branchements, on obtiendra une structure qui tendra de plus en plus vers l'autosimilarité exacte.

La notion de fractale a été conceptualisée par Benoît Mandelbrot en 1974⁷. Il s'agit d'un objet présentant une auto-similarité systématique à toutes les échelles. De nombreux phénomènes naturels présentent un caractère fractal, et l'éclair en est un. Cette nature fractale de la foudre a été mise en évidence par Niemeyer, Pietronero et Weismann dans leur article : "Fractal Dimension of Dielectric Breakdown Model". Ils ont en effet créé un modèle mathématique, le Dielectric Breakdown Model (abrégié DBM dans la suite du rapport) qui permet d'étudier le comportement de particules dans un champ électrique, et ont conclu que ce modèle présentait des caractéristiques fractales. En effet, le DBM permet de rendre compte de la croissance de toutes les fractales dites "Laplaciennes" c'est à dire les fractales dont les particules sont sous l'influence d'un champ électrique.

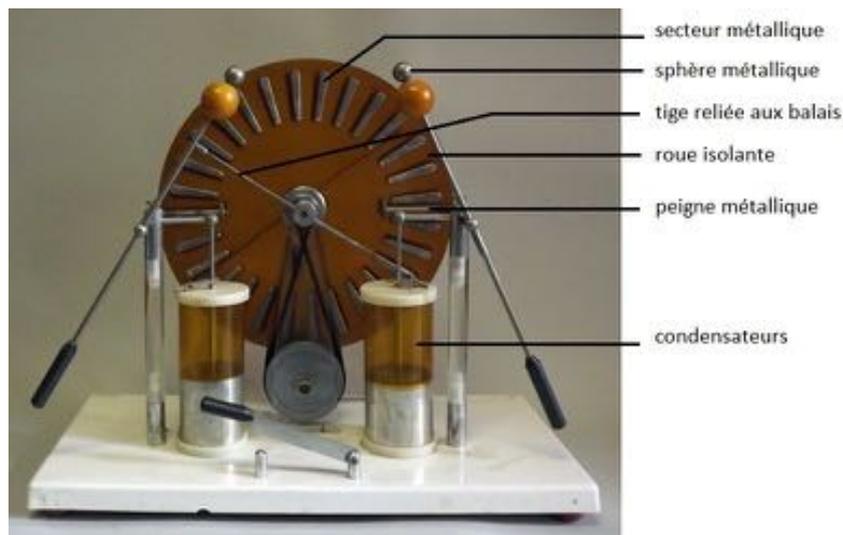
Après avoir compris l'origine et les caractéristiques d'un éclair nuage-sol, nous avons voulu reproduire le plus fidèlement possible ce phénomène naturel fascinant.

⁷ Les Objets fractals - Forme, hasard et dimension

II. La propagation de la foudre

A. Présentation du projet de reproduction expérimentale

L'objectif de nos expériences est de reproduire au mieux la foudre et plus particulièrement sa propagation. Lors d'un orage, l'arc électrique qui relie le nuage à la terre est un flux d'électrons extrêmement intense le rendant visible à l'oeil nu. Notre objectif a été de reproduire expérimentalement ce phénomène de propagation. Ne pouvant pas utiliser de si hautes tensions, nous avons cherché d'autres moyens d'étudier la forme de la foudre et avons donc mis en place différents protocoles permettant de reconstituer ce phénomène naturel à plus petite échelle. Une partie de nos expériences utilisent la machine de Wimshurst en tant que générateur. Voici en quelques lignes son fonctionnement.

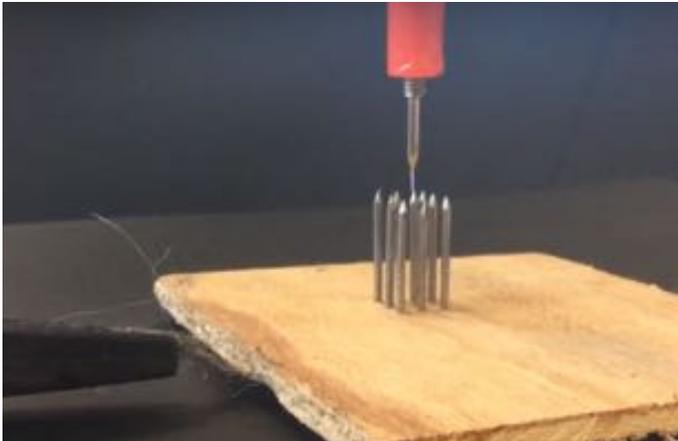


Photographie légendée de la machine de Wimshurst [figure 4]

La machine de Wimshurst est constituée de deux disques isolants, recouverts de secteurs métalliques, qui tournent en sens opposé. Au début de l'expérience, les secteurs sont neutres électriquement, il n'y a donc pas de tension. Deux balais sont en contact avec les secteurs métalliques. Lorsque l'on fait tourner les disques au moyen d'une manivelle, les balais frottent les secteurs et leur arrachent des électrons. Des peignes métalliques captent les charges, les dirigeant vers les condensateurs, situés en-dessous d'eux. Un des condensateurs se charge positivement et l'autre négativement. La charge des condensateurs se traduit par une augmentation de la tension électrique.

Deux pointes métalliques reliées aux condensateurs et dont l'extrémité est une sphère métallique permettent la formation d'un arc électrique entre elles. Lorsque les deux sphères sont suffisamment proches et la tension électrique assez élevée, on peut obtenir un arc électrique allant de l'anode à la cathode. Nous avons cherché à étudier la progression du front de décharge. Pour cela nous avons filmé l'arc électrique produit par la machine à l'aide de la caméra ultra-rapide du Laboratoire de Physique Statistique de l'ENS Paris Est (Photron APX RS), allant jusqu'à 100 000 images par secondes, qui nous a été prêtée par deux chercheurs de l'ENS avec lesquels nous travaillions. Pourtant, cela n'a pas fonctionné car même à une telle vitesse, nous n'avons pas réussi à voir les différentes étapes de la propagation de l'arc. La formation de l'arc ne tenait en effet qu'en deux images. De plus, les conditions d'humidité, de température ou de densité de l'air ne variaient

pas assez sur quelques centimètres pour donner à l'arc la structure ramifiée caractéristique de l'éclair.



Nous avons par la suite essayé de montrer le caractère aléatoire de la propagation d'un arc électrique sur de petites distances. Pour cela, nous avons planté dans une surface de bois 9 clous de 1,5cm de hauteur disposés en carré avec 3 mm de distance entre chacun d'entre eux. Nous avons relié l'une des bornes de la machine de Wimshurst à une pointe, que nous avons placée à 4 mm au dessus des clous. La seconde borne était reliée à la planche par une tresse métallique située en-dessous.

Photo prise de notre expérience avec les 9 clous [figure 5]

Nous avons constaté que l'arc électrique reliant la pointe à un clou alternait entre plusieurs clous distincts. Ceci nous montre donc que même sur de petites distances, le phénomène de propagation d'un arc électrique présente des variations. Cela a ainsi constitué un point de départ à nos recherches qui tentent de modéliser la trajectoire de la foudre.

B. Reproductions expérimentales des caractéristiques de la foudre

Lors de notre TPE nous avons étudié les figures de Lichtenberg. Ces dernières sont des figures radiales ramifiées tracées par le flux d'électrons d'un arc électrique frappant un isolant. Afin de les reproduire expérimentalement nous avons recouvert une plaque de PVC de poudre de lycopode. En effet, lorsque le courant électrique frappe l'isolant et que les électrons se répandent à sa surface, la poudre permet de marquer le trajet des électrons sur l'isolant.

Nous obtenions alors une figure circulaire où de nombreuses ramifications se formaient à partir du point d'impact, au centre de la figure. Lorsque la décharge se produit, les électrons sont projetés sur la plaque et empruntent alors un chemin aléatoire sans jamais se croiser, ce qui forme un arbre avec une infinité de branches et de ramifications. Cette répartition particulière des électrons est due au fait que les électrons sont des particules chargées négativement, qui par conséquent se repoussent. Cette première expérience nous a permis d'appréhender le phénomène de propagation des électrons et d'en comprendre les propriétés les plus élémentaires.

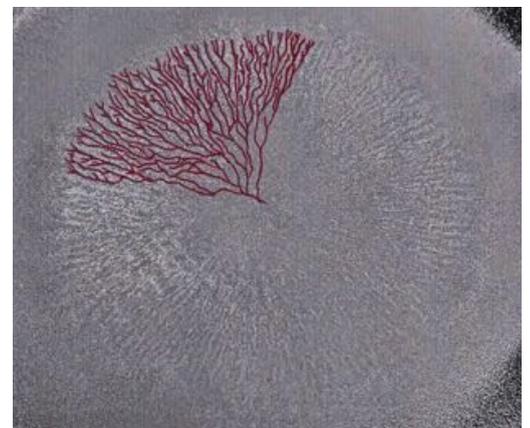


Photo des figures obtenues retravaillée pour valoriser les ramifications [figure 6]

Nous avons ensuite étudié le phénomène de propagation linéaire, et non plus radial. Pour cela nous réalisons un montage où chacune des sphères de la machine de Wimshurst est reliée à une électrode (l'une en pointe, l'autre plane), toutes deux plongées dans de l'huile de ricin. Nous avons donc une différence de potentiel entre les deux électrodes, créant un champ électrostatique entre les bornes du montage. Nous ajoutons ensuite dans l'huile une quantité moyenne de semoule (environ 2 cuillères à café), qui est un diélectrique: les chaînes d'amidon qui la composent se polarisent lorsque les grains se situent dans un champ électrique suffisamment important. Les grains ainsi polarisés s'orientent (le côté positif vers la cathode et le négatif vers l'anode) sur les lignes de champ. Ainsi, ils modifient localement le champ électrique autour d'eux, ce qui influence les autres grains qui ont alors tendance à se coller à eux, formant des arcs allant d'une électrode à l'autre.

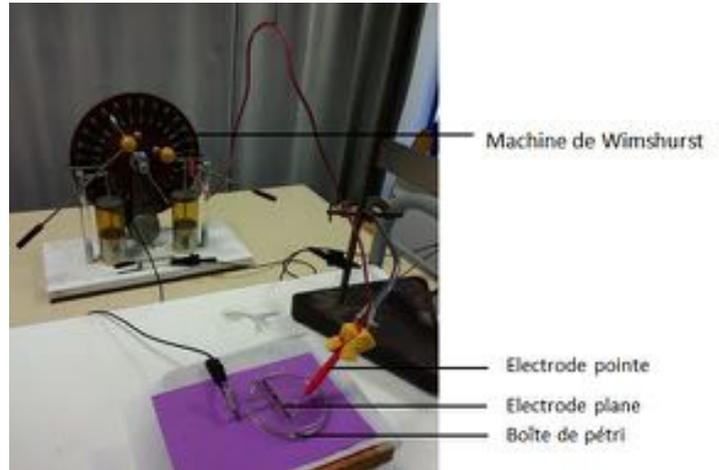


Photo du montage [figure 7]

La viscosité de l'huile permet d'obtenir des figures peu volatiles sans empêcher la mobilité des grains de semoule. De plus, son caractère isolant permet d'éviter une rupture diélectrique en son sein, et donc de maintenir le champ électrostatique constant.

Lors de la formation de l'arc, on peut observer les grains de semoule qui s'orientent devant la pointe puis sont ramenés en arrière avant de revenir devant la pointe. Nous supposons que la pointe charge les grains de semoule avec lesquels elle est en contact ; la pointe et les grains étant alors de même charge ils se repoussent ensuite. En rentrant en contact avec d'autres grains, les grains chargés leur transfèrent leur charge, et seraient donc de nouveau attirés par la pointe.

Ainsi dans ce montage, la pointe représente le nuage et l'électrode plane, le sol. Dès lors, l'alignement progressif des grains de semoule peut être comparé au phénomène de propagation des électrons lors d'une décharge.

Nous avons ensuite décliné cette seconde expérience en plusieurs montages pour pouvoir modifier à chaque fois certains paramètres. Nous avons d'abord cherché à mettre en évidence le phénomène de propagation en 2D. Pour cela, nous avons disposé la pointe, l'électrode plane avec un faible volume d'huile de ricin dans une boîte de Pétri, pour que tous les grains de semoule soient sur un même plan. Cette expérience permet de voir le mouvement des grains influencés par le champ alentour. Le motif dessiné par les grains témoigne alors de la présence des lignes de champ.



Photo de la boîte de Pétri comportant l'huile et les grains de semoule [figure 8]

Plusieurs paramètres ont influencé cette expérience. Tout d'abord, il a fallu déterminer la position de la pointe. Nous avons tenté l'expérience en plaçant la pointe soit en contact avec l'huile, soit en suspension à quelques millimètres au-dessus de l'huile ($\approx 1,5\text{mm}$). Nous avons constaté que lorsque la pointe était en contact de l'huile, l'expérience était concluante tandis que lorsque la pointe était en suspension elle avait tendance à repousser l'huile créant un espace vide autour, et cela ne donnait pas de figures lisibles. Nous supposons que l'air est plus facilement repoussé par la pointe que l'huile. Lorsque la pointe se trouve dans l'air, elle ionise l'air environnant et le repousse, et l'air a donc un effet mécanique sur l'huile et la repousse aussi. La position de la pointe est également déterminée par la distance la séparant de l'électrode plane, ainsi que son angle d'inclinaison. En effet, plus la distance est grande, plus le champ est faible. Dans le cas de l'expérience, le champ électrique n'est pas uniforme et les lignes ne sont pas parallèles, mais la remarque reste valable. Pour rappel, dans le cas du condensateur plan, le champ électrique est uniforme et a pour expression

$$\vec{E} = \frac{U}{d} \times \vec{u}$$

Or plus le champ est faible, plus les grains de semoule s'orientent difficilement. Afin d'obtenir des figures plus lisibles nous avons donc décidé de choisir une distance relativement faible ($3\text{ cm} \pm 5\text{ mm}$). Pour ce qui est de l'angle d'inclinaison, nous avons constaté que les figures étaient optimales lorsque la boîte de pétri et la pointe formaient un angle de $45^\circ \pm 2^\circ$. En effet, l'effet de pointe déforme les lignes équipotentielles du champ électrostatique à ce niveau et permet donc d'obtenir des figures plus lisibles lorsque l'électrode en pointe est orientée vers l'électrode plane.

Le deuxième paramètre est lié à la quantité de semoule. En effet, s'il y a trop de grains, ils s'agrègent et forment des amas rendant les figures illisibles. Inversement, si la quantité est trop faible, ils ne forment pas de figures allant de la pointe à l'électrode plane.

Le troisième paramètre est lié à la machine de Wimshurst. Tout d'abord, la vitesse de rotation des disques a une influence sur la tension du circuit. Nous avons constaté que des figures plus lisibles se formaient lorsque nous augmentions graduellement jusqu'à une allure stable. De plus, il fallait que la distance entre les sphères métalliques de la machine soit suffisamment importante pour qu'aucun arc électrique ne se forme entre elles. En effet, si tel avait été le cas, la tension entre les électrodes aurait fortement diminué, ce qui aurait modifié le champ électrostatique.

Finalement, le quatrième paramètre est lié à la qualité de l'huile. Nous avons constaté qu'après un nombre important d'expériences réalisées dans une même huile, des décharges s'y produisaient. On peut donc supposer que l'huile finissait par s'ioniser.

Afin d'observer plus en détail le mouvement de la semoule, nous avons placé des grains colorés en rouge près de l'électrode en pointe, et d'autres en vert près de l'électrode plane. En effet, nous voulions mettre en évidence la propagation des grains depuis leurs électrodes respectives. Nous supposons ainsi pouvoir assister à un phénomène d'attachement semblable à celui des traceurs ascendants et descendants décrits plus haut. Cependant, nous avons constaté que les grains ne formaient pas de figures et bougeaient très peu. La coloration étant le seul paramètre ayant changé par rapport à l'expérience initiale, nous en avons conclu que le colorant représentait un facteur qui empêchait notre expérience de se dérouler correctement. De plus, le colorant créait des amas de plusieurs grains de semoule, ce qui limitait leur mobilité et qui influait peut-être sur les propriétés diélectriques de la semoule.

Nous avons aussi fait varier la température de l'huile en la refroidissant pour voir si sa viscosité avait une influence sur la lisibilité des figures. L'huile rendue plus visqueuse empêchait les grains de semoule de se déplacer, et les figures n'ont pas été plus lisibles.

Dans un second temps, nous avons voulu voir si l'on pouvait étendre l'expérience à la 3D. Pour cela, nous avons tenté de reproduire la première expérience mais cette fois dans un cylindre en plastique et non une boîte de Pétri. La pointe était en contact avec la surface d'huile à l'intérieur du cylindre et la seconde électrode était formée par un disque de cuivre dans le fond du cylindre. Le disque était ensuite relié à la machine par un contact sous le cylindre. Nous avons alors observé des mouvements convectifs dans l'huile qui, en entraînant la semoule, l'empêchaient donc de s'aligner sur les lignes de champs.



Photo légendée de l'expérience montrant les mouvements de convection [figure 9]

Cependant ces mouvements ont formé un espace d'air entre la pointe et le bas du volume dans lequel nous avons observé des arcs électriques. Nous ne savons pas à quoi ce phénomène de convection est dû mais, il a attiré l'attention des deux chercheurs de l'ENS nous ayant prêté une caméra rapide, qui pensent retravailler dessus.

Notre expérience n'ayant pas fourni les résultats attendus, nous nous sommes donc rendus au Palais de Découverte afin de pouvoir travailler sur des dispositifs à très haut voltage. Nous avons eu la chance de pouvoir utiliser leurs installations, et tout particulièrement la bobine tesla du département d'électrostatique. Cette dernière est caractérisée par une tension de 1 500 000 volts, permettant de produire des éclairs ramifiés de plus d'un mètre. Le dispositif est alimenté en courant du secteur passant par le transformateur. Ce courant charge le condensateur qui se décharge ensuite dans la bobine primaire, qui produit un champ électromagnétique. Ceci va induire une différence de potentiel aux bornes de la bobine secondaire. Pour qu'un maximum d'énergie soit transféré entre le circuit primaire et secondaire, ils présentent la même fréquence de résonance.

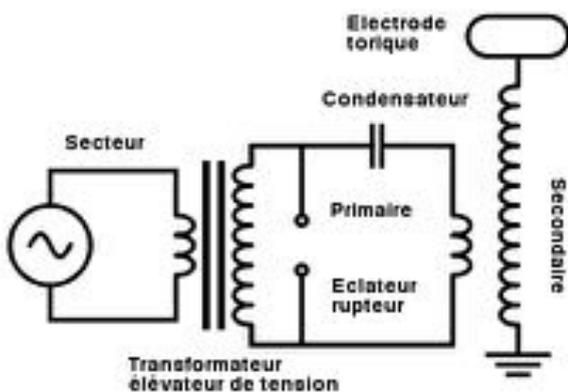


Schéma d'une bobine Tesla [figure 10]

La bobine nous a permis d'observer les ramifications des arcs électriques mais également des traceurs ascendants partant des pointes placées sur la cage de faraday l'entourant. De plus, lorsque l'arc se forme on observe une forte intensification de la lumière produite ce qui témoigne du flux intense d'électrons.

Nous avons filmé les arcs à l'aide d'une caméra normale et la caméra ultra-rapide qui nous a été prêtée. Voici ci-dessous l'une des images prises où l'on peut observer le traceur ascendant à gauche et les ramifications de l'arc électrique issu de la bobine à droite.

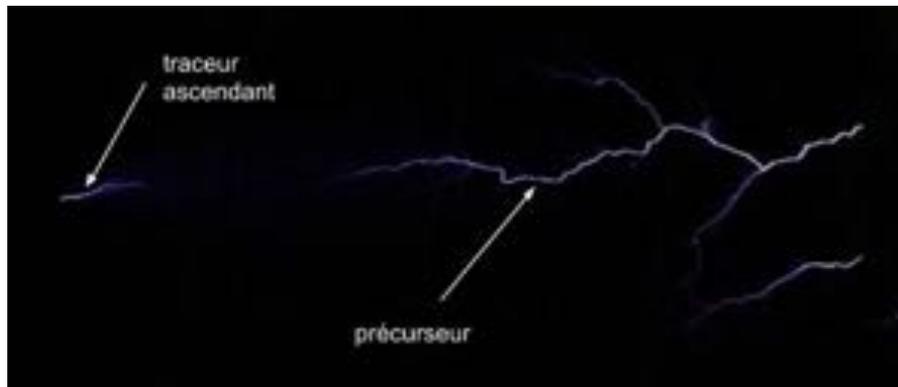


Photo prise par notre appareil photo reflex de l'arc en formation [figure 11]

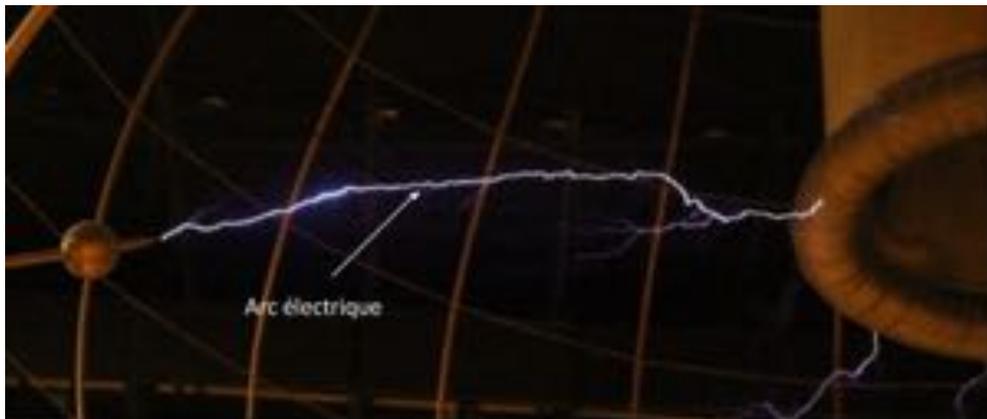


Photo prise par notre appareil photo reflex de l'arc électrique issu de la bobine Tesla [figure 12]

L'ensemble de ces expériences nous a donc permis d'étudier plus en détails la propagation de la foudre et d'observer certaines de ses particularités.

III. Modélisation mathématique et simulation de la foudre

Après avoir tenté de reproduire expérimentalement à plus petite échelle la propagation de la foudre, tout d'abord sur la surface d'un isolant puis à travers un fluide, l'huile de ricin, et l'air, nous avons utilisé des modèles mathématiques dans le but de modéliser le trajet de l'arc électrique. Nous nous sommes ainsi dans un premier temps tourné vers le modèle de Diffusion Limitée par Agrégation, puis vers le DBM (pour Dielectric Breakdown Model). afin d'aboutir à une modélisation plus complète. L'étude de ce modèle nous a permis de concevoir une simulation informatique du trajet de la foudre entre le nuage et le sol.

A. Modèles mathématiques permettant de décrire la propagation de la foudre

1. Formation décrite par le modèle de diffusion limitée par agrégation (DLA)

La diffusion limitée par agrégation, ou DLA, est un modèle mathématique conçu par Witten et Sander en 1981⁸ pour décrire l'agrégation des particules de fumée. On lui a trouvé depuis beaucoup d'autres applications, notamment en électrostatique : en effet, on peut modéliser les figures de Lichtenberg tracées par la foudre à l'aide de la DLA.

Le processus aboutissant à une figure de DLA est le suivant : on fixe un point (appelé la graine, l'origine de la figure) au centre d'un espace en deux dimensions, puis on place un grand nombre de particules à égale distance de cette graine (donc sur un cercle de centre la graine). On fait exécuter à chaque particule une marche aléatoire (telle que la décrivent les lois du mouvement brownien, un mouvement totalement aléatoire reposant sur le choix d'une nouvelle direction à chaque moment du déplacement de la particule) jusqu'à ce qu'elle soit en contact avec une particule fixée de la figure naissante. La particule se fixe alors, et participe à la croissance de la figure de DLA.

Ce modèle nous intéresse car la figure de Lichtenberg est elle aussi obtenue par agrégation : chaque charge vient tour à tour se greffer sur la figure qui croît de la même manière que la figure de DLA. Pourtant, dans le cas des figures de Lichtenberg et à fortiori dans le cas de la propagation de la foudre dans l'atmosphère, le trajet du flux d'électron est influencé par le potentiel du milieu dans lequel il évolue. Un autre modèle est donc nécessaire pour s'approcher de manière plus satisfaisante du phénomène physique.

Ci-dessous, figures obtenues par notre programme de simulation de DLA (que nous ne détaillerons pas plus dans cette contribution).

(voir schéma de son fonctionnement : annexe 3)

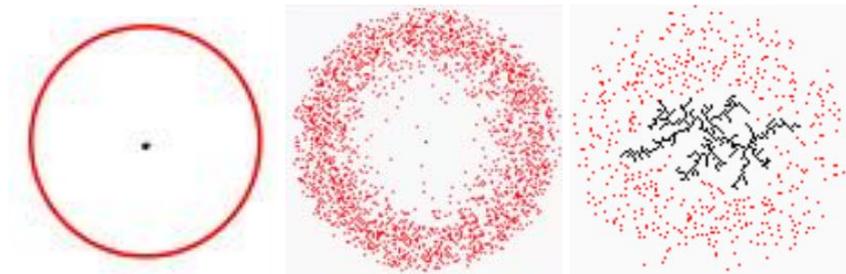


Schéma initial et deux étapes du déroulement du programme DLA [figure 13]

2. Progression décrite par le DBM (dielectric breakdown model)

Il existe un modèle plus adapté, le DBM, qui permet une meilleure modélisation des structures fractales créées par des sources d'énergie électrique. Ainsi, ce modèle, développé en 198⁹, utilise les équations de Laplace qui régissent la trajectoire des particules dans un champ électrique. Il permet une meilleure modélisation de la forme d'un éclair, et a d'ailleurs été spécialement conçu pour cet effet par ses concepteurs dans leur article cité en annexe. En fait, ce modèle permet de représenter de façon plus générale la croissance des fractales dites "laplaciennes", c'est-à-dire dont la formation est régie par les lois de l'électromagnétisme.

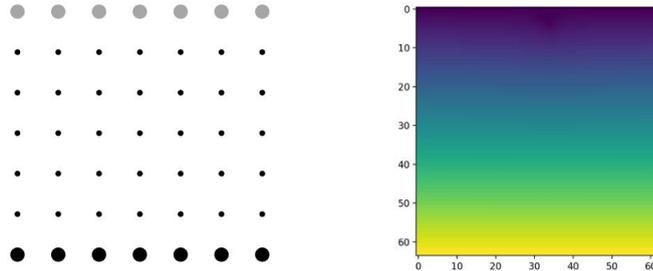
⁸ T. A. Witten et L. M. Sander, 1983

⁹ L. Niemeyer, L. Pietronero et H.J. Wiesmann, 1984

Rappelons qu'une distribution de charges génère un champ électrostatique vectoriel E dérivé d'un potentiel scalaire Φ qui vérifie l'équation de Laplace en tout point de l'espace ne portant pas de charge :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Le fonctionnement du modèle DBM est le suivant : on travaille sur un espace 2D discrétisé, une grille formée de carré de côté 1.



grille NxN, charges positives au sol, négatives au nuage: le potentiel est linéaire en y de 0 (en violet) à 1 (en jaune) [figure 14]

Comme nous allons le détailler plus tard, chaque itération du modèle comporte trois étapes distinctes. Dans un premier temps, il faut identifier des sites de croissance potentiels autour d'une graine. Ensuite, on calcule le potentiel électrique de chacun de ces sites en résolvant l'équation de Laplace en tenant compte des conditions aux limites imposées à la grille. Enfin, on choisit et ajoute le nouveau site de croissance en fonction des probabilités de croissance et on le définit comme faisant partie de la structure (donc potentiel $\Phi = 0$).

L'équation de Laplace est un point central de cette partie de notre olympiade. En effet, elle permet d'expliquer la différence entre le modèle de la DLA et celui du DBM. La résolution de l'équation de Laplace permet de calculer le potentiel électrostatique. Or, plus le potentiel électrique est fort en un point, plus la particule va être attirée dans cette direction, ce qui détermine les probabilités de croissance dans les diverses directions possibles.

Le modèle de croissance décrit par le DBM permet de produire des figures similaires à celles que nous avons obtenues durant nos expériences ce qui souligne sa pertinence.

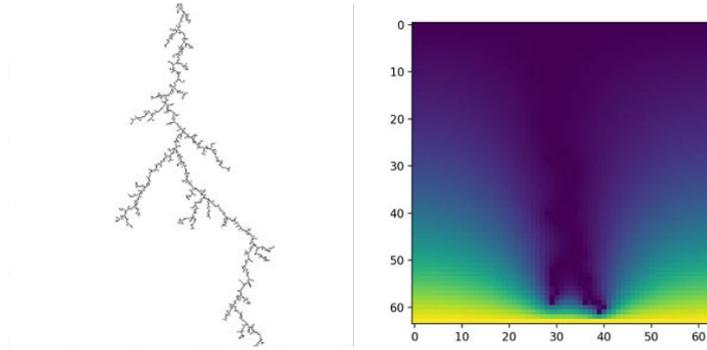
B. Programme de simulation

Afin de simuler le phénomène de rupture diélectrique de la foudre nous avons utilisé l'article de recherche de Perera qui nous a mené à résoudre l'équation de Laplace d'une manière itérative en se basant sur les résultats de l'article de Mitra¹⁰. Des astuces d'accélération pour la recherche des candidats de croissance ont été empruntées à un article plus récent¹¹.

Un exemple de résultat de simulation en utilisant notre programme en python *dbm.py* (dont le code est en annexe) est illustré dans la figure suivante :

¹⁰ A.K. Mitra

¹¹ T. Kim, A. Sud, M.C. Lin et J. Sewall, 2007



Simulation de la foudre sur une grille de 512x512 pixels et exemple de carte de potentiel [figure 15]

1. Concepts physiques et mathématiques du programme

Le potentiel électrique Φ de chaque point du bitmap suit les lois définies par l'équation de Laplace et satisfait :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0$$

Il vérifie les conditions aux limites $\Phi=1$ sur le sol et $\Phi=0$ dans le nuage car la terre et le nuage sont considérés comme des conducteurs parfaits donc équipotentiels.

En général, il n'existe pas de solution analytique de l'équation de Laplace en 2D lors de la décharge: il faut donc la résoudre de manière itérative.

2. Résolution itérative de l'équation de Laplace en appliquant la méthode aux différences finies

La résolution de cette équation s'opère en appliquant la méthode aux différences finies en considérant le problème de Dirichlet en se reposant sur l'article de Mitra.

Le problème est de déterminer la valeur du potentiel $\phi_{i,j}$ au point de coordonnées (i,j) de la grille NxN matérialisant la discrétisation de l'espace 2D étudié où sont disposées des charges positives et négatives.

A l'initialisation seul le nuage est au potentiel 0 : $\phi_{0,j}^0 = 0$ pour $0 \leq j \leq N - 2$, et le sol est au potentiel $\phi_{N-1,j}^0 = 1$ pour $0 \leq j \leq N - 2$. Toute charge positive ou négative de la grille est affectée d'un potentiel respectif 1 ou 0 immuable au cours du temps: elles constituent les conditions aux limites.

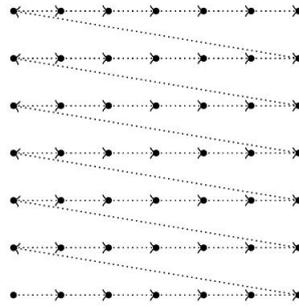
Le potentiel en tout autre point de la grille est déterminé par une mise à jour itérative, suivant un calcul barycentrique de pondération ω entre sa valeur à l'itération précédente et la moyenne des potentiels des quatre voisins connexes:

$$\phi_{i,j}^{(n)} = \phi_{i,j}^{(n-1)} + \frac{\omega}{4}\delta_{i,j}$$

où:

$$\delta_{i,j} = \phi_{i+1,j}^{(n-1)} + \phi_{i-1,j}^{(n-1)} + \phi_{i,j+1}^{(n-1)} + \phi_{i,j-1}^{(n-1)} - 4\phi_{i,j}^{(n-1)}$$

A l'itération n, la mise à jour des potentiels est effectuée séquentiellement en parcourant la grille de bas en haut (en commençant par le sol) et de gauche à droite de la manière suivante:

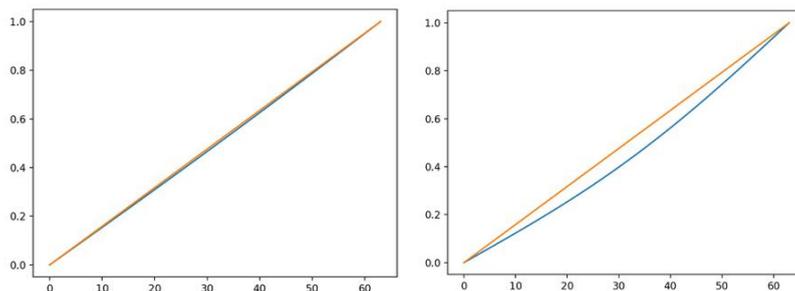


Sens de parcours de la grille lors de la mise à jour des potentiels [figure 16]

Il est à noter que dans l'équation précédente de mise à jour à l'itération n du potentiel du point (i,j), afin de propager plus rapidement les conditions en bordure, les valeurs les plus récentes sont utilisées quand elles sont disponibles, c'est à dire celles à l'itération n des points adjacents à gauche et en-dessous du point (i,j). Les potentiels des points situés au-dessus et à droite du point (i,j) n'étant pas disponibles à l'itération n, on doit considérer la valeur à l'itération précédente, n-1. On itère cette opération jusqu'à ce que le processus converge, c'est à dire que la variation de la mise à jour maximale du potentiel des points de la grille est de 0.001% de sa valeur maximale 1 : $\epsilon = 10^{-3}$ (valeur de ϵ donnée par la publication).

$$\max_{0 \leq i, j < N} \frac{|\delta_{i,j}|}{\phi_{i,j}^{(n)}} < \epsilon$$

Il est à noter que l'article dédié¹², préconise une valeur de 0.01% qui n'est pas suffisante dans notre cas pour atteindre un calcul de potentiel assez précis, comme l'attestent les figures suivantes:



Convergence de la courbe de potentiel bleue vers le potentiel linéaire initial en orange pour $\epsilon = 10^{-4}$ (courbe de gauche) et $\epsilon = 10^{-3}$ (courbe de droite) [figure 17]

Cette méthode de résolution itérative est qualifiée de successive à sur-relaxation quand on utilise un facteur $\omega > 1$. Dans le programme la valeur $\omega = 1.6$ est employée afin d'accélérer la convergence. On observe que l'étape de calcul à l'itération 0 des potentiels est la plus longue à converger. Ensuite, lors de l'ajout d'un électron perturbant la résolution précédente, la mise à jour des potentiels est beaucoup plus rapide.

¹² M.D.N Perea et D.U.J. Sonnadara, 2012

3. Justification de la méthode itérative de résolution de l'équation de Laplace

La dérivée seconde d'une fonction f en un point a peut s'écrire sous la forme :

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{h^2}$$

Cette expression est valable lorsque h tend vers 0, donc quand l'espace dans lequel on considère la dérivée seconde est continu. Si nous tentons de l'appliquer à un espace 2D discrétisé avec une résolution de 1, on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{h^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{h^2}$$

Si nous prenons f la fonction qui à chaque point du bitmap associe son potentiel électrique, nous obtenons :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \approx \frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} - 4\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

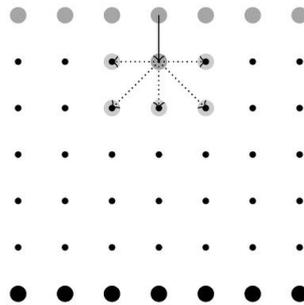
Ainsi :

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{4}(\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1})$$

On obtient bien par calcul que le potentiel électrique en un point (i,j) du bitmap est égal à la moyenne des potentiels des points qui l'entourent. L'idée est donc d'itérativement forcer cette relation en parcourant tout le bitmap plusieurs fois jusqu'à ce que la mise à jour des valeurs du potentiel en un point (i,j) devienne négligeable.

4. Election du site de croissance parmi les sites de croissance potentiels

L'ensemble des sites de croissance potentiels est constitué des points adjacents aux points de la décharge qui n'ont qu'un unique voisin chargé: supposons qu'il y en a n à cette itération du programme. Il y a 8 chemins possibles de croissance à partir d'une charge sur une grille 2D.



Grille $N \times N$ des sites de croissance possibles, sol charges +, nuage charges - équipotentiel [figure 18]

Dans son article fondateur, Niemeyer montre que La probabilité p_i que la décharge passe par le point i de croissance potentielle de potentiel ϕ_i est déterminé par:

$$p_i = \frac{\phi_i^\eta}{\sum_{j=1}^n \phi_j^\eta}$$

Dans cette expression, ϕ_i représente la différence de potentiel entre la charge P déjà présente sur le bitmap et la charge du nouveau point potentiel Q émanant du point P. On a donc finalement ϕ_i le potentiel du point Q car le potentiel de P, point faisant partie de la figure, est nul :

$$\phi_i = \frac{E_{P,Q}}{d} = \frac{\phi(Q) - \phi(P)}{d} = \phi(Q)$$

En effet on fixe : $\phi(P) = 0$ et arbitrairement $d=1$.

Le variable η est un paramètre qui contrôle la dimension de croissance de la structure de décharge. Pour $\eta=0$, on obtient une structure de croissance 2D de DLA et pour une valeur de η suffisamment grande, une ligne de dimension 1 est produite.

On peut vérifier que la somme des probabilités est bien égale à 1:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

Afin de choisir le site de croissance élu, il suffit donc de tirer une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle [0,1] et de lui associer le point i qui lui correspond en fonction des probabilités

$\{p_j\}_{1 \leq j \leq n}$.

IV. Dimension fractale

A. La foudre, un objet fractal

De nombreux objets ont des dimensions entières appelées dimensions euclidiennes (d), c'est l'ensemble des paramètres nécessaires pour définir un objet dans l'espace. Les carrés ont ainsi une dimension $d=2$, les cubes de dimension $d=3$. Cependant, il est important de noter que les fractales sont des objets aux dimensions non entières appelées dimensions fractales. Notée D , elle permet notamment de décrire totalement une fractale "parfaite", c'est-à-dire à la suite d'une infinité d'itérations.

La structure fractale de la foudre lui confère ainsi une caractéristique qui se retrouve à chaque arc électrique. Le calcul de la dimension nous permet alors de vérifier la cohérence de nos expériences - ainsi que celle du programme - avec le phénomène que nous tentons de modéliser. Pour cela nous avons comparé la dimension fractale de nos figures avec celle calculée par la Deutsche Meteorologische Gesellschaft sur 20 photographies de foudre analysées dans leur article "Contributions to Atmospheric physics"¹³ : $D = 1,34 \pm 0,06$.

B. Application du calcul des dimensions

Le calcul d'une dimension euclidienne s'effectue selon la formule : $n^d = k$ où n est le facteur d'agrandissement d'une figure et k le nombre de fois où la figure d'origine est présente dans son agrandissement ; d nous donne alors la dimension de la figure. Si l'on prend l'exemple d'un carré dont on multiplie la longueur du côté par 2 on obtient bien 4 fois le carré d'origine dans son agrandissement ce qui vérifie $2^2 = 4$.

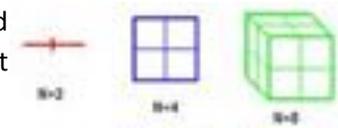


Schéma explicatif du calcul de la dimension [figure 19]

¹³ Sous la direction de F. Herbert, 1989

Cependant, dans le cadre des figures fractales il est extrêmement compliqué de déterminer le facteur d'agrandissement k car nous n'avons pas de figure d'origine à proprement définie. Dès lors, il faut recourir à d'autres méthodes.

L'une des méthodes fréquemment utilisées est celle de Minkowski qui permet de calculer la dimension d'une fractale par "box-counting". Le but est de compter le nombre de carrés $K(\varepsilon)$ de côté ε nécessaires pour recouvrir la fractale, puis d'observer l'évolution du nombre de carrés nécessaires pour recouvrir la fractale quand on diminue la taille ε du carré. Plus le côté du carré est petit plus le recouvrement de la figure est précis puisqu'alors le réseau de carrés s'adapte toujours plus précisément aux variations de la forme de la figure, comme on peut l'observer sur la figure ci-contre. Notons que le périmètre d'une fractale étant infini, une précision totale n'est obtenue que pour un nombre infini de carrés dont le côté tend vers 0. La dimension de Minkowski est donc la limite du nombre de carrés lorsque ε tend vers 0.

Une fois K trouvé, on applique la formule suivante pour calculer la dimension :

$$dim_{box}(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(K(\varepsilon))}{\log(1/\varepsilon)}$$

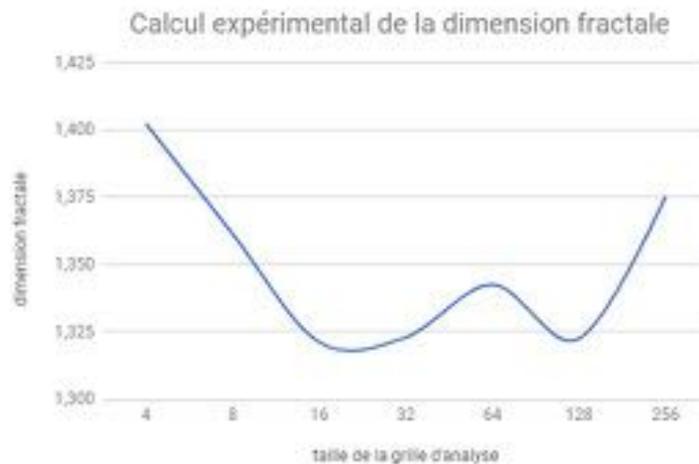
L'emploi du logarithme se justifie par la définition : $\log(a)^b = b \log(a)$ qui permet d'isoler l'exposant b . Dans cette formule, b nous donne la dimension et constitue ainsi le parallèle de D de la première formule : $n^D=k$.

L'application de cette méthode sur les figures réalisées pendant nos expériences demandait au préalable de tracer un quadrillage sur les photos prises (annexe 4). Afin d'obtenir des calculs de dimension fractale à différents degrés de précision en fonction de ε nous avons fait varier la taille du quadrillage (cf annexe 5).

Voici le tableau récapitulatif des résultats obtenus :

Taille du côté de la photo (en nombre de carrés)	4	8	16	32	64	128	256
Nombre de carrés de la figure (k)	7 ± 6,05%	17 ± 6,56%	39 ± 2,97%	98 ± 1,44%	266 ± 1,44%	612 ± 1,21%	2051 ± 1,22%
Dimension fractale	1,40235 ± 0,04371	1,36145 ± 0,03158	1,32119 ± 0,01072	1,32291 ± 0,00416	1,34252 ± 0,00347	1,32247 ± 0,00249	1,37525 ± 0,00220

Tableau n°1 : des dimensions calculées sur la figure expérimentale par la méthode de Minkowski



Graphique n°1 des dimensions calculées sur la figure expérimentale par la méthode de Minkowski [figure 20]

Les mesures étant réalisées expérimentalement nous avons également tenté de déterminer leurs incertitudes. Pour cela, nous avons choisi aléatoirement une portion de la photo sur laquelle nous avons modifié le positionnement du quadrillage d'un demi carré sur neuf positions différentes (position initiale, à droite, à gauche, en haut au centre, en haut à droite, en haut à gauche, en bas au centre, en bas à droite, en bas à gauche).

Nous avons alors pu compter le nombre de carrés (i) correspondant à la figure sur ces neuf positions (n) et ainsi de déterminer la moyenne du nombre de carré (k') sur cette portion de photo. On peut alors calculer l'incertitude de comptage de la moyenne sur cette portion par :

$$u(k') = \frac{\sigma(n-1)}{\sqrt{n}}$$

où $\sigma(n - 1)$ est l'écart-type donné par les différentes valeurs de i trouvées en fonction de la position du quadrillage.

En parallèle nous avons compté k carrés recouvrant la figure sur la photo entière. Cependant k ne résulte que d'une seule mesure. On calcul donc le nombre de fois où la portion de photo est présente sur la photo entière. On a :

$$N = \frac{k}{k'}$$

Dès lors on peut déterminer l'erreur-type de comptage en prenant en compte le fait que la photo entière contient plusieurs portions de photo. On a donc :

$$u''(k) = u(k) \times \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Enfin pour trouver l'incertitude-type de toute la figure il faut ajouter les incertitudes de chaque portion de la photo :

$$u''(k) = u'(x) \times N$$

Afin de calculer l'incertitude absolue du nombre de carré total de la figure avec un niveau de confiance à 95% on calcule donc :

$$U(k) = 2 \times u''(k)$$

Cette méthode de calcul de l'incertitude $U(k)$ permet d'aboutir à une estimation de k et nous donne donc l'écart possible du nombre de carrés représentant la figure ce qui nous permet ainsi de déterminer une incertitude sur la dimension.

Les résultats que nous avons obtenus sont proches de la valeur théorique (moyenne de la dimension fractale des figures expérimentales $\approx 1,35$ et valeur théorique $\approx 1,34$). L'écart que l'on constate peut se justifier de différentes manières. Tout d'abord, cette expérience modélise l'arc électrique, mais ne constitue en aucun cas une reproduction exacte des conditions de déclenchement d'un éclair CG. De plus, les grains de semoule comportent des formes variables qui rendent la figure imparfaite et imprécise. Ensuite, ce calcul est expérimental et réalisé à partir d'une photo ce qui rend la mesure imprécise. Enfin, le calcul est réalisé uniquement à partir d'une seule figure, or sur un phénomène aussi complexe et aléatoire cela ne permet pas de rendre compte précisément de la dimension fractale moyenne.

De même, nous avons réalisé le calcul des dimensions fractales des figures réalisées par notre programme de simulation. Les figures étant aléatoires, nous avons décidé de faire une moyenne du nombre de carrés comptés pour dix figures de même bitmap pour que le calcul soit le plus proche possible de la valeur théorique. De plus, nous avons fait varier la valeur de η . Voici les résultats obtenus :

Pour $\eta = 2$:

Taille du côté du bitmap (en pixels)	64	128	256	512
Moyenne du nombre de pixels dessinés	1937	3285	3285	20640
Dimension fractale	1,820	1,669	1,646	1,593

Pour $\eta = 3$:

Taille du côté du bitmap (en pixels)	64	128	256	512
Moyenne du nombre de pixels dessinés	1386	2360	5408	13212
Dimension fractale	1,739	1,601	1,550	1,521

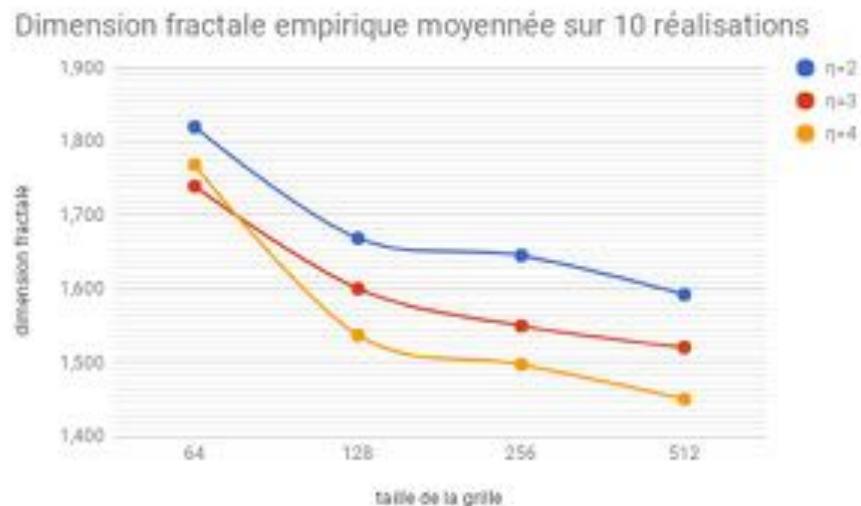
Pour $\eta = 4$:

Taille du côté du bitmap (en pixels)	64	128	256	512
Moyenne du nombre de pixels dessinés	1564	1737	4044	8530
Dimension fractale	1,769	1,537	1,498	1,451

Tableau n°2 regroupant les dimensions fractales calculées en fonction des bitmap et de η

Nous n'avons pas eu encore le temps de calculer les incertitudes sur les estimations calculées.

Nous aboutissons donc au graphique suivant :



Graphique n°2 des dimensions calculées par la méthode de Minkowski sur les figures de notre programme [figure 21]

On remarque que, conformément à nos attentes, la valeur de la dimension fractale obtenue tend à se stabiliser lorsque la taille du bitmap augmente. Ainsi, nous nous apercevons que pour obtenir une simulation cohérente avec la réalité, une valeur de η de 4 est plus appropriée car sa dimension fractale est plus proche de celle que nous avons obtenu expérimentalement. Notons que nous aurions pu avoir un plus large éventail de valeurs en choisissant des valeurs de η relatives, non entières, ce qui sera l'objet de la suite de notre projet.

Les résultats sont cohérents avec la valeur théorique. Néanmoins, un léger décalage apparaît entre la valeur de la dimension fractale théorique de la foudre et celle des figures obtenues. Cela peut s'expliquer par plusieurs phénomènes. Tout d'abord, le DBM considère que la surface sur laquelle se produit la décharge est parfaitement homogène, or le milieu dans lequel a lieu la rupture diélectrique ne l'est pas : la pression de l'air, la température et l'humidité évoluent en fonction de l'altitude, et la distance entre le nuage et le sol est suffisamment grande pour que ces variations soient conséquentes. Ensuite, nous avons considéré la source de potentiel (le nuage) comme étant unique et uniforme, ce qui n'est pas toujours le cas lors d'un orage où plusieurs structures électrifiées cohabitent et peuvent ainsi fortement influencer la trajectoire des éclairs, donnant lieu à des structures parfois presque horizontales et/ou présentant des motifs étranges. De plus, nous avons considéré le sol comme absolument plat, alors que la topographie d'une zone est souvent plus complexe : cela influence la trajectoire des éclairs qui sont attirés par les objets pointus dépassant de la surface du sol. Enfin, le nombre de clichés analysés est relativement faible, et sur un phénomène aussi complexe cela ne permet pas de rendre compte précisément de la dimension fractale moyenne.

Malgré cela, les faibles écarts que nous obtenons avec la valeur théorique lors du calcul des dimensions des figures de nos expériences et de celles de notre programme nous permettent de vérifier la cohérence de nos résultats avec le modèle de propagation.

Conclusion

Au cours de cette Olympiade, nous avons travaillé sur la trajectoire et les motifs de la foudre. Après avoir étudié les mécanismes relatifs à l'origine et au déclenchement de l'éclair, nous avons tenté de reproduire expérimentalement la propagation de l'arc électrique, mais également de filmer la progression du front de décharge des éclairs de la bobine Tesla du Palais de la Découverte. Bien que certaines expériences n'aient pas abouti aux résultats escomptés, nous sommes néanmoins parvenus à obtenir des motifs similaires à ceux que trace la foudre dans l'atmosphère. Ainsi, nous avons pu simuler informatiquement le trajet du flux électronique en se fondant sur des modèles mathématiques cohérents. Afin de s'assurer de la cohérence de ces simulations, nous avons enfin calculé la dimension fractale d'une figure de propagation expérimentale et nous l'avons comparé à celle d'une figure obtenue à l'aide de notre simulation. De plus, nous avons noté que ces résultats expérimentaux sont cohérents avec les valeurs obtenues lors de précédentes recherches sur le sujet.

Nous projetons d'essayer d'étendre nos expériences à la trois dimension. Pour cela, nous voudrions créer une figure de Lichtenberg dans un cube d'acrylique à l'aide des infrastructures du Palais de la découverte et modifier notre programme pour avoir une simulation en trois dimensions. En parallèle, nous voudrions approfondir nos recherches sur les éclairs, notamment leur occurrence en fonction des types de systèmes convectifs. Enfin, nous souhaiterions complexifier le programme notamment pour créer un sol adapté à une topologie réaliste (avec irrégularités) qui nous permettrait à terme, de créer l'équivalent d'un système prédiction.

Nous avons ainsi fini par montrer, expérimentalement et par simulation que la dimension fractale de la colère de Zeus vaut environ 1,4.

Remerciements

Nous remercions tout d'abord Mme Guerra et M. Ménétrier, professeurs de physique de l'École Alsacienne, pour nous avoir apporté leur aide, leur soutien et leur temps au cours de ces olympiades.

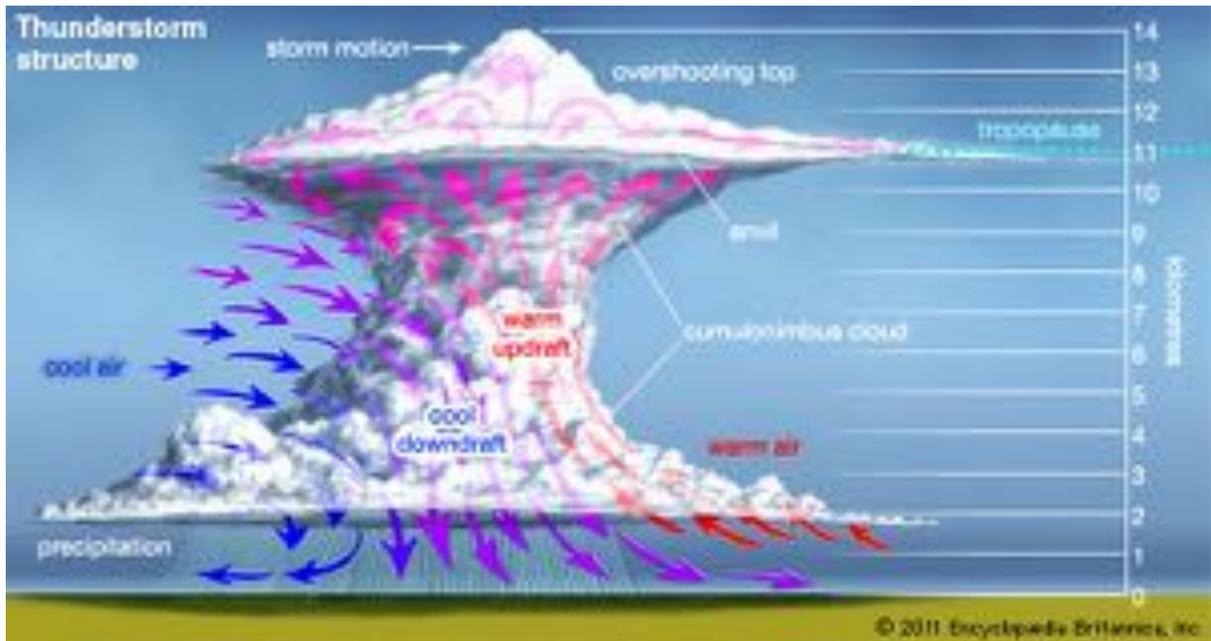
Nous remercions aussi les chercheurs de l'ENS, M. Frédéric Lechenault et Sébastien Moulinet qui nous ont prêté la caméra ultra-rapide et apporté leurs précieux conseils.

Nous remercions également les modérateurs du Palais de la Découverte, et en particulier Maryline Certain pour nous avoir permis d'utiliser leurs installations.

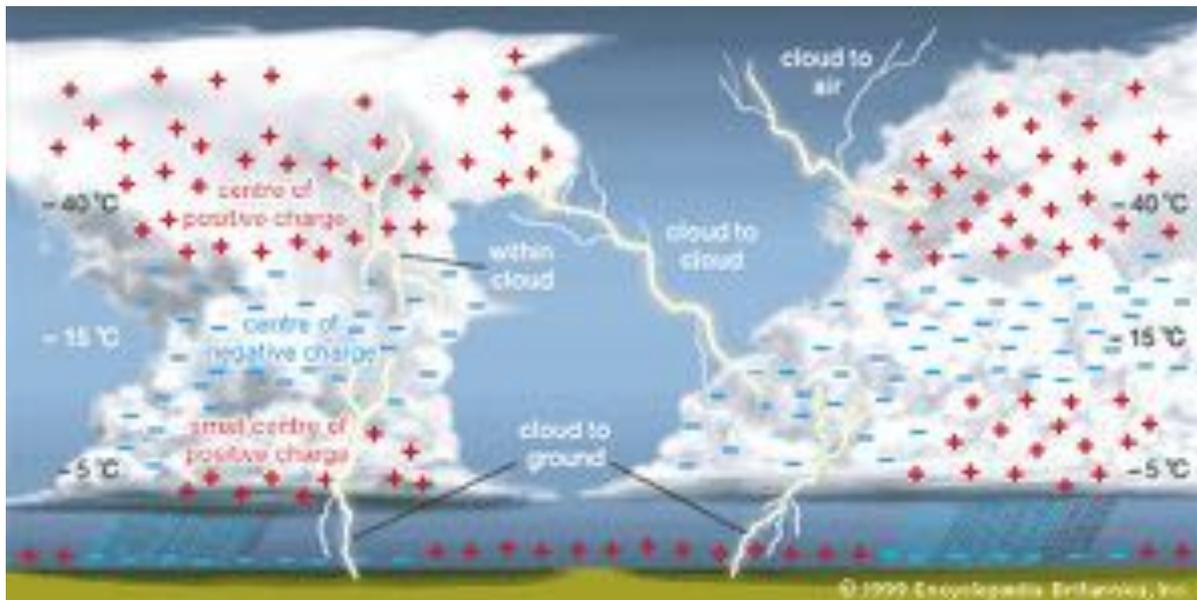
Mme Santorsola, professeur de mathématiques à l'École Alsacienne, qui nous a été d'une grande aide pour comprendre la résolution itérative de l'équation de Laplace.

Annexes

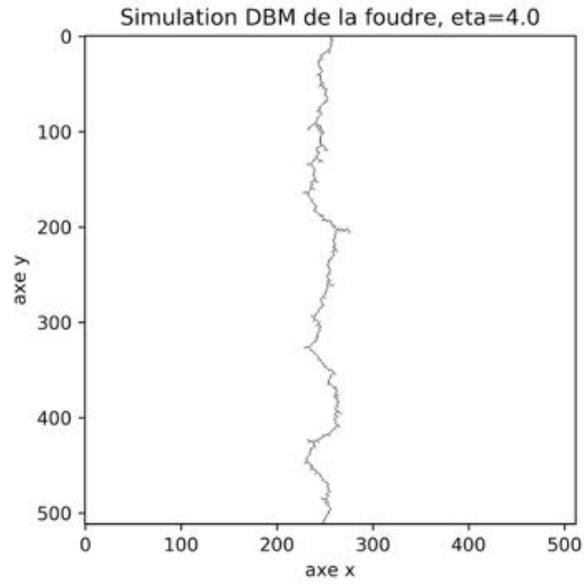
Images supplémentaires



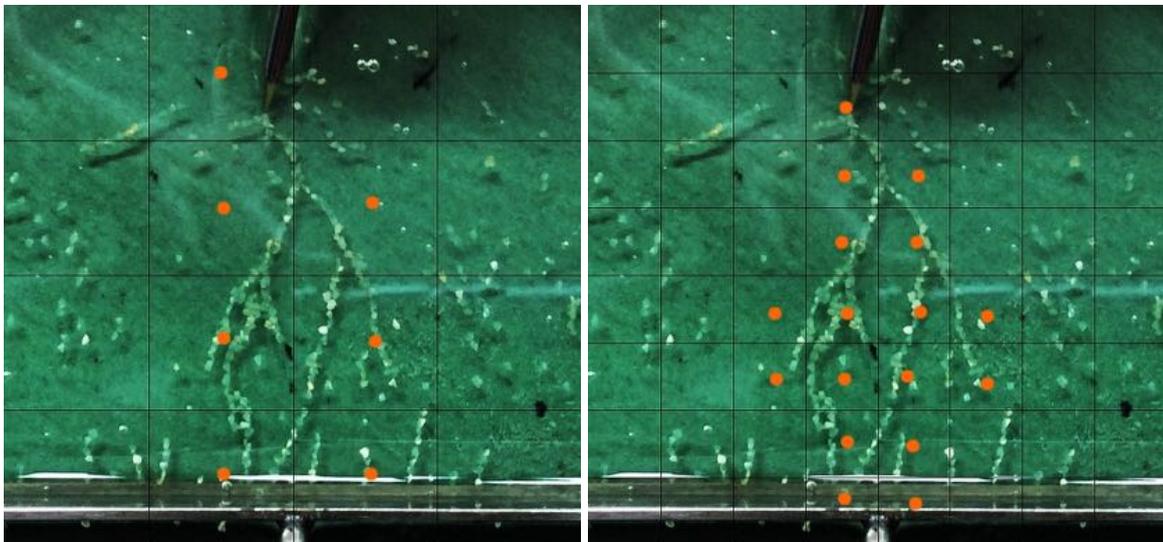
Annexe 1 : figure 22 : schéma de la structure d'un nuage orageux



Annexe 2 : figure 23 : schéma récapitulatif : répartition des charges et types d'éclairs au sein du nuage



Annexe 5 : Figures 25, 26, 27 : simulations avec différents paramètres η résultats du programme de simulation



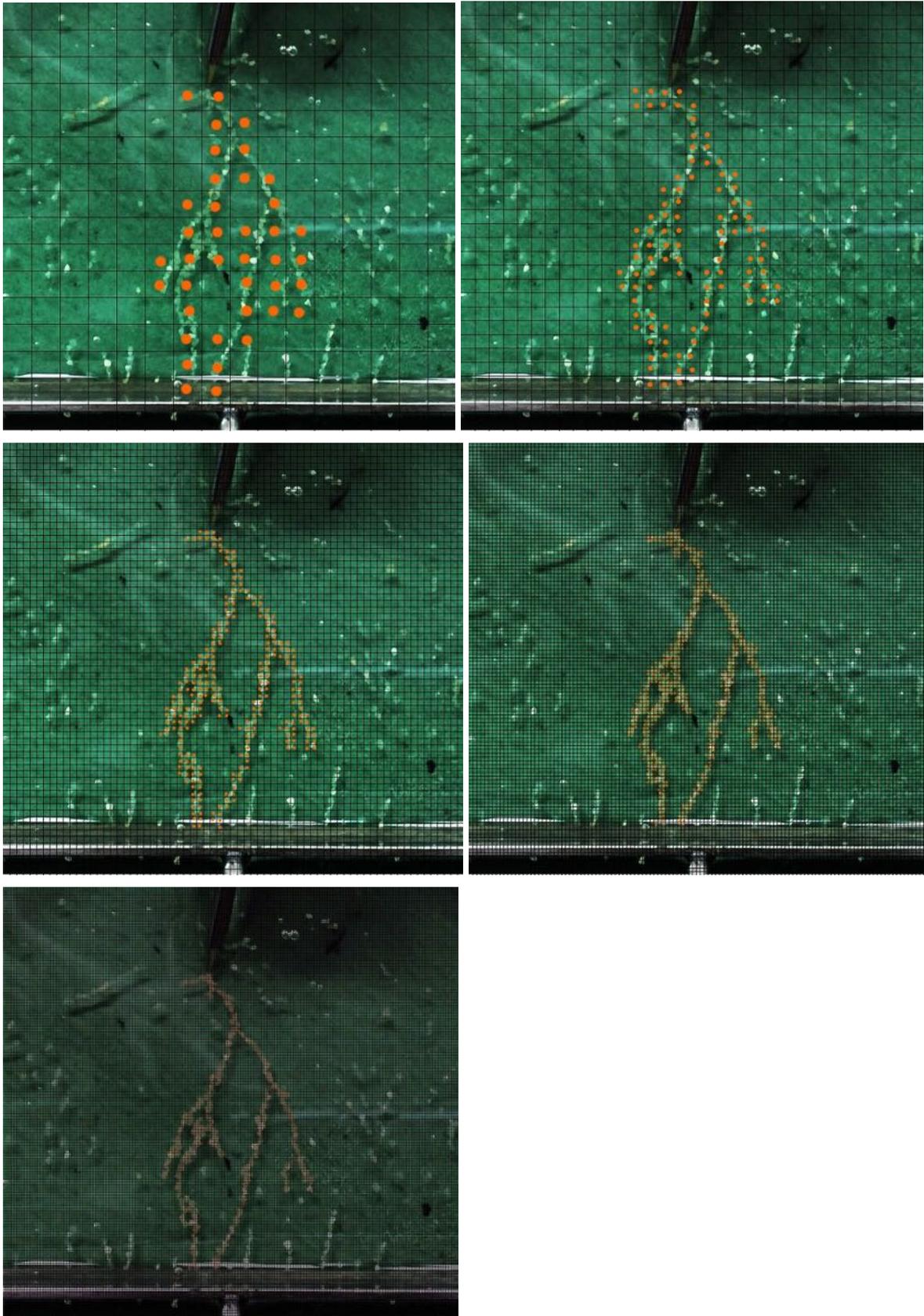


figure 28 : quadrillages pour les calculs de dimension

Sources des figures

[figure 1]

https://fr.wikipedia.org/wiki/Cumulus_bourgeonnant#/media/File:Cumulus_congestus_cloud.jpg

[figure 2]

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cumulonimbus_seen_from_Milano-Malpensa_airport,_2010_08.JPG

[figure 3]

<https://weatherpix.photoshelter.com/image/I00006xA.0QFCwGo>

[figure 4] http://patrimoines.midipyrenees.fr/index.php?id=369&L=0¬ice=IM81001135&tx_patrimoine_search_pi1%5Bstate%5D=detail_simple&tx_patrimoine_search_pi1%5Bniveau_detail%5D=N3

[figure 10] https://fr.wikipedia.org/wiki/Bobine_Tesla#/media/File:Teslacirc1.png

[figure 19] https://fr.wikipedia.org/wiki/Dimension_fractale

[figure 22] <https://www.britannica.com/science/thunderstorm>

[figure 23] <https://kids.britannica.com/students/assembly/view/139631>

Toutes les autres figures de ce mémoire ont été réalisées par nos soins : les figures 5 à 9 et 11 et 12 sont des photographies de Johanna Charpentier, ainsi que celle de la page de couverture.

Bibliographie

- M.D.N. Perera and D.U.J. Sonnadara, Fractal nature of simulated lightning channels, 2012, <https://sljp.sljol.info/article/download/5433/4347/>
- Ambar K. Mitra, Finite Difference Method for the Solution of Laplace Equation, http://www.public.iastate.edu/~akmitra/aero361/design_web/Laplace.pdf
- Fast Simulation of Laplacian Growth, Theodore Kim, Jason Sewall, Avneesh Sud and Ming C. Lin, 2007, <http://gamma.cs.unc.edu/FRAC/>
- L. Niemeyer, L. Pietronero and H. J. Wiesmann, Fractal Dimension of Dielectric Breakdown, Physical Review Letters, volume 52, 1984, <http://laplace.ucv.cl/Patterns/Referencias/Pietronero-prl52-1033.pdf>
- T. A. Witten and L. M. Sander, Diffusion-limited aggregation, Physical Review B, 1983, <https://journals.aps.org/prb/abstract/10.1103/PhysRevB.27.5686>
- Christelle Barthe. Etude de l'activité électrique des systèmes orageux à l'aide du modèle Méso-NH. Physique [physics]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2005. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011490/file/MANUSCRIT_2.PDF
- Magalie Buguet. Activité d'éclairs et paramètres physiques issus de l'observation radar dans les orages : application au projet HyMeX. Océan, Atmosphère. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2012. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00761486/file/These_BUGUET.pdf
- A.A Tsonis et J.B Elsener, Fractal Characterization and Simulation of Lightning, Department of geological and geophysical sciences, University of Wisconsin-Milwaukee, 1986 https://people.uwm.edu/aatsonis/files/2016/11/1987-05_Tsonis-AA_FractalCharacterizationandSimulationofLightning-u4a42z.pdf
- E.R Mansell, D.R MacGorman, C.L Ziegler, J.M Straka, Simulated three-dimensional branched lightning in a numerical thunderstorm model, JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH, VOL. 107,

NO. D9, 10.1029/2000JD000244 :

<https://pdfs.semanticscholar.org/7a0c/e0a26334fba85d17b927a1acad2264bf886c.pdf>

- B. Mandelbrot, Les objets fractals, forme et dimension

Déroulé du programme de simulation de DBM

Les variables utilisées par le programme en annexe sont les suivantes :

- N est la dimension de la grille en nombre de pixels
- *pixelBitmap* est un tableau $N \times N$ qui contient la trace de la décharge (suivant le DBM)
- *condInitBitmap* est un tableau $N \times N$ qui contient les conditions initiales des positions des charges dont les valeurs sont +1 (charge positive), -1 (charge négative), 0 (absence de charge)
- *potentielsBitmap* est un tableau $N \times N$ qui contient la valeur du potentiel électrique en tout point de la grille
- *pixelsCroissance* et *potentielsCroissance* sont des listes contenant respectivement les points de croissance possible de la foudre et leur potentiel. Un point de croissance possible est voisin d'une charge constituant la décharge de la foudre.

Le principe de fonctionnement du programme utilisé pour simuler le DBM est le suivant :

- on fixe les conditions initiales suivantes:
 - le sol a comme potentiel fixe $\Phi=1$ sur la ligne $N-1$ du bitmap représentant le sol et $\Phi=0$ sur la ligne 0 du bitmap représentant le nuage
 - on dispose des charges positives (+1) sur le sol (ligne $N-1$ de *condInitBitmap*) et négatives sur le nuage (-1) (ligne 0 de *condInitBitmap*) et nulles partout ailleurs
 - l'origine de la décharge (graine) est situé au milieu du nuage au point $(\lfloor N/2 \rfloor, 1)$ qui devient une *condInitBitmap* mise à -1 et le nouveau point "nouv"
 - la liste des candidats de site de croissance *pixelsCroissance* et de leurs potentiels *potentielsCroissance* sont vides
- tant que le nouveau point *nouv* ne touche pas le bord du bitmap
 - on élimine les points et potentiels des listes *pixelsCroissance* et *potentielsCroissance* qui sont adjacent sur le bitmap *pixelsBitmap* au nouveau point *nouv*
 - on recalcule les potentiels *potentielsBitmap* en tout point de la grille qui se trouve perturbé par l'ajout de la charge négative au point *nouv*
 - la mise à jour des potentiels se base sur la méthode itérative de sur-relaxation de résolution par différence finie des équations de Laplace qui est détaillée dans les sections suivantes.
 - on met à jour les potentiels restants de *potentielsCroissance* qui sont influencés par l'ajout de la charge négative au point *nouv*
 - on ajoute à la liste des candidats de croissance possibles les points voisins du point *nouv* qui n'appartiennent pas déjà à la liste *pixelsCroissance* et on ajoute à la liste *potentielsCroissance* les potentiels correspondants
 - on élit le nouveau site de croissance au point *nouv* en tirant une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[0;1]$ et choisissant le point de *pixelsCroissance* de probabilité correspondante calculée en fonction des *potentielsCroissance* détaillée dans les sections suivantes.

- on dessine le point *nouv* sur *pixelsBitmap* et on place une charge -1 dans *condInitBitmap* et on affecte un potentiel nul à la position *nouv* dans *potentielsBitmap*

Programme de simulation de DBM

(écrit en python, utilisant les librairies “matplotlib” et “numpy” pour prendre en charge la partie graphique)

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

import sys
import random
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math as m
from datetime import datetime

# précalcul du potentiel qui est linéaire
RAPINIT = True
# sous partie à mettre à jour à un nouveau
pixel de taille 2S+1x2S+1
S = 10
MAJPETITE = False
# 1% = 0.01, 0.1% = 0.001, convergence optimale
à 0.00001 mais compromis vitesse 0.0001
MAXDELTA = 0.0001

if len(sys.argv) != 3:
    N = 64
    eta = 3
else:
    # dimension de la grille NxN
    N=int(sys.argv[1])
    # paramètre de croissance de la structure
    eta=float(sys.argv[2])

partMax = 50000
# la grille est de NxN mais en réalite la
mesure d'une unité h est 1/N
pixelsBitmap = [[0 for j in range(N)] for i in
range(N)]
# que pour le dessin pour éviter la
transposition
dessinBitmap = [[0 for j in range(N)] for i in
range(N)]
# conditions initiales -1 charge négative ou 1
charge positive ou 0 non defini sera mis à jour
pendant le programme avec les nouvelles charges
condInitBitmap = [[0 for j in range(N)] for i
in range(N)]
potentielsBitmap = [[0.0 for j in range(N)] for
i in range(N)]
pixelsCroissance = []
potentielsCroissance = []

def init():
    # ligne du bas en charge positives et trois
charges supperposées en haut au milieu
    # ligne du bas en charge positives et ligne
du haut en charges négatives (nuage)
    for i in range(N):
        condInitBitmap[i][N-1] = 1
        potentielsBitmap[i][N-1] = 1
        dessinBitmap[N-1][i] = 1
    for i in range(N):
        condInitBitmap[i][0] = -1
        potentielsBitmap[i][0] = 0
        dessinBitmap[0][i] = 0.5
    if RAPINIT:
        # calcul analytique initial du
potentiel entre deux plaques: potentiel
linéaire en y
        for j in range(1,N-1):
            pot = 0.0+j*1.0/(N-1)
            for i in range(N):
                potentielsBitmap[i][j] = pot

# paramètre de relaxation pour accélérer la
convergence
omega = 1.6

def majPotentielRapide(i,j):
    delta = 0
    nb = 1
    if abs(condInitBitmap[i][j]) != 1:
        if i == 0:
            delta = potentielsBitmap[i+1][j] +
potentielsBitmap[i][j-1] +
potentielsBitmap[i][j+1] - 3 *
potentielsBitmap[i][j]
            nb = 3
        elif i == N-1:
            nb = 3
            delta = potentielsBitmap[i-1][j] +
potentielsBitmap[i][j-1] +
potentielsBitmap[i][j+1] - 3 *
potentielsBitmap[i][j]
        else:
            delta = potentielsBitmap[i-1][j] +
potentielsBitmap[i+1][j] +
potentielsBitmap[i][j-1] +
potentielsBitmap[i][j+1] - 4 *
potentielsBitmap[i][j]
            nb = 4
```

```

    # on ne met à jour que les points qui ne
    sont pas des contraintes initiales ou qui ne
    continnent pas des charges
    potentielsBitmap[i][j] =
    potentielsBitmap[i][j] + omega * delta / nb
    return
abs(delta/potentielsBitmap[i][j]/nb)
    else: return 0.0

def majPotentielsSousBitmapRapide(x,y,k):
    # mise à jour de la sous partie centrée sur
    x,y de taille 2k+1 x 2k+1
    maxdelta = 0
    # parcours de bas en haut et de gauche à
    droite
    # il ne faut pas dépasser le bord: on
    s'arrête avant
    Ix = max(0,x-k)
    Sx = min(N-1,x+k)
    Iy = max(0,y-k)
    Sy = min(N-1,y+k)
    # N-1 à 0
    for j in range(Sy,Iy-1,-1):
        for i in range(Ix,Sx+1):
            delta = majPotentielRapide(i,j)
            if delta > maxdelta:
                maxdelta = delta
    return maxdelta

def majPotentielsBitmapRapide():
    maxdelta = 0
    # parcours de bas en haut et de gauche à
    droite
    # N-1 à 0
    for j in range(N-1,-1,-1):
        # 0 à N-1
        for i in range(N):
            delta = majPotentielRapide(i,j)
            if delta > maxdelta:
                maxdelta = delta
    return maxdelta

def estValide(xy, bitmap):
    # valide si qu'un seul voisin dessiné de xy
    dans bitmap
    if bitmap[xy[0]+1][xy[1]] +
    bitmap[xy[0]-1][xy[1]] + bitmap[xy[0]][xy[1]+1]
    + bitmap[xy[0]][xy[1]-1] +
    bitmap[xy[0]+1][xy[1]+1] +
    bitmap[xy[0]-1][xy[1]+1] +
    bitmap[xy[0]+1][xy[1]-1] +
    bitmap[xy[0]-1][xy[1]-1] == 1:
        return True
    return False

def sontAcotes(pt1,pt2):
    if (abs(pt1[0] - pt2[0]) <= 1) and
    (abs(pt1[1] - pt2[1]) <= 1):
        return True
    return False

def pasAcoteCroissance(pt, pixelsCroissance):
    for c in range(len(pixelsCroissance)):
        if sontAcotes(pt, pixelsCroissance[c]):
            return False
    return True

def eliminePixelsPres(pt, pixelsCroissance,
    potentielsCroissance):
    for c in range(len(pixelsCroissance) - 1,
    -1, -1):
        if sontAcotes(pt, pixelsCroissance[c]):
            pixelsCroissance.pop(c)
            potentielsCroissance.pop(c)
    return None

def estDansCroissance(pt, pixelsCroissance):
    for c in range(len(pixelsCroissance)):
        if pixelsCroissance[c] == pt:
            return True
    return False

def croissanceRapide(nouv, pixelsBitmap,
    pixelsCroissance, potentielsCroissance):
    # ajoute les pixels adjacents a nouv qui ne
    sont pas dans pixelsCroissance
    candidats = [[nouv[0] + 1, nouv[1]],
    [nouv[0] - 1, nouv[1]], [nouv[0], nouv[1] + 1],
    [nouv[0], nouv[1] - 1],
    [nouv[0] + 1, nouv[1] + 1],
    [nouv[0] + 1, nouv[1] - 1], [nouv[0] - 1,
    nouv[1] + 1], [nouv[0] - 1, nouv[1] - 1], ]
    for c in range(len(candidats)):
        # si le candidat a qu'un seul voisin et
        n'est pas déjà un point dessiné et qu'il est
        pas en bordure supérieure
        if estValide(candidats[c],
        pixelsBitmap) and
        (pixelsBitmap[candidats[c][0]][candidats[c][1]]
        == 0) and (candidats[c][1] > 0):
            pixelsCroissance.append(candidats[c])

    potentielsCroissance.append(potentielsBitmap[ca
    ndidats[c][0]][candidats[c][1]])

def choix(pixelsCroissance,
    potentielsCroissance):
    choixPotentiel = random.uniform(0, 1)
    PotentielTotalEta = 0
    pTotal = []
    sommePTotal = 0
    for i in range(len(potentielsCroissance)):
        PotentielTotalEta +=
    pow(potentielsCroissance[i], eta)
        for i in range(len(pixelsCroissance)):
            pi = pow(potentielsCroissance[i], eta)
    / PotentielTotalEta
        sommePTotal += pi
        pTotal.append(sommePTotal)
    for i in range(len(pTotal)):
        if pTotal[i] > choixPotentiel:
            choixFinal = pixelsCroissance[i]
            return([choixFinal, i])

```

```

def majPotentielsCroissance(pixelsCroissance,
potentielsCroissance):
    # mise a jour des potentiels de la liste
    complête
    for c in range(len(pixelsCroissance)):
        potentielsCroissance[c] =
potentielsBitmap[pixelsCroissance[c][0]][pixels
Croissance[c][1]]

def main(pixelsBitmap, pixelsCroissance,
potentielsCroissance):
    run = True
    init()
    # graine: début de décharge en haut au
milieu
    graine = [int(N / 2.0), 1]
    nouv = graine
    pixelsBitmap[nouv[0]][nouv[1]] = 1
    dessinBitmap[nouv[1]][nouv[0]] = 1
    condInitBitmap[nouv[0]][nouv[1]] = -1
    potentielsBitmap[nouv[0]][nouv[1]] = 0
    nbPart = 1
    while run == True:
        # elimine les pixelsCroissance qui sont
proche de nouv
        eliminePixelsPres(nouv,
pixelsCroissance, potentielsCroissance)
        # mise à jour de la carte des
potentiels
        maxdelta = 1
        # condition d'arrêt à MAXDELTA du max
des mises à jour des potentiels relatifs
        cf = 0
        if MAJPETITE:
            while maxdelta > MAXDELTA:
                maxdelta =
majPotentielsSousBitmapRapide(nouv[0], nouv[1],
S)
                cf += 1
            maxdelta = 1
            cs = 0
            while maxdelta > MAXDELTA:
                maxdelta =
majPotentielsBitmapRapide()
                cs += 1
            # définition des nouveaux sites de
croissance potentiels
            croissanceRapide(nouv, pixelsBitmap,
pixelsCroissance, potentielsCroissance)
            # mise à jour des potentiels des
candidats à la croissance

majPotentielsCroissance(pixelsCroissance,
potentielsCroissance)
        res = choix(pixelsCroissance,
potentielsCroissance)
        nouv = res[0]
        # le point choisi est elimine des
croissances possibles
        pixelsCroissance.pop(res[1])
        potentielsCroissance.pop(res[1])

# le point choisi est dessine
pixelsBitmap[nouv[0]][nouv[1]] = 1
dessinBitmap[nouv[1]][nouv[0]] = 1
# le point choisi devient une
contrainte à potentiel nul
condInitBitmap[nouv[0]][nouv[1]] = -1
potentielsBitmap[nouv[0]][nouv[1]] = 0
nbPart += 1
if nouv[0] == 0 or nouv[0] == N-1 or
nouv[1] == N-2 or nbPart > partMax:
    run = False

print("N=",N,"eta=",eta,"nbpart=",nbPart)

main(pixelsBitmap, pixelsCroissance,
potentielsCroissance)

fichier =
"foudre-"+str(N)+"-"+str(eta)+"-"+datetime.now(
).strftime("%Y%m%d%H%M%S")
np.save(fichier,np.array(dessinBitmap))

```